Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
Khoa Khoa học Cơ bản
Bộ môn Toán

ĐỀ THI CUỐI KỲ ***HỌC KỲ I NĂM HỌC 2015-2016***

MÔN: *QUY HOẠCH TOÁN HỌC*

Mã môn học: **MATH131001** *Thời gian* : 90 phút (12/1/2016)

Đề thi **gồm 02 trang** ***Được phép sử dụng tài liệu***

Câu 1 (2 *điểm*) *Hãy lập mô hình toán học của bài toán sau đây.* (chỉ lập mô hình, không giải)

Một công ty may mặc cần sản xuất 3 loại sản phẩm may mặc là ***A, B, C*** và mỗi sản phẩm này đều phải qua 3 công đoạn là ***công đoạn 1***, ***công đoạn 2***, ***công đoạn 3***. ***Chi phí sản xuất trung bình*** (gồm tất cả chi phí như nguyên liệu, nhân lực,...) đối với mỗi sản phẩm, giá bán tương ứng của mỗi sản phẩm, tổng số giờ lao động ứng với mỗi công đoạn mà công ty có được trong một tuần và định mức tiêu hao số giờ lao động của mỗi sản phẩm ứng với mỗi công đoạn được cho trong bảng sau:

	Định mức tiêu hao số giờ lao động của mỗi sản phẩm ứng với mỗi công đoạn			Tổng số giờ lao động ứng với ***mỗi công đoạn*** mà công ty có được trong 1 tuần
	A	***B***	***C***	
Công đoạn 1	3	2,5	2	350 giờ (CĐ1)
Công đoạn 2	5	3	5	650 giờ (CĐ2)
Công đoạn 3	4	2	3	400 giờ (CĐ3)
Chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm	\$6	\$5,5	\$5	
Giá bán mỗi sản phẩm	\$11	\$9	\$8,5	

Biết các sản phẩm sản xuất ra đều có thể bán hết với điều kiện số sản phẩm ***A*** không được vượt quá tổng của số sản phẩm ***B*** và ***C***. Hỏi mỗi tuần công ty cần sản xuất mỗi loại sản phẩm là ***A, B, C*** với số lượng tương ứng bao nhiêu để ***lợi nhuận trung bình lớn nhất***?

Câu 2 (3 *điểm*) Cho bài toán (P)

(1) $f(x) = x_1 + 8x_2 - 3x_3 \to \max$

(2) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 14 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \ge 9 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\ ,\ x_3 \ge 0$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng của (P).
b) Trong hai bài toán, xét xem bài toán nào đơn giản hơn thì giải bài toán đó rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Câu 3 (2,5 *điểm*) Một công ty may mặc cần sản xuất 15000 đơn vị sản phẩm loại A_1, 13000 đơn vị sản phẩm loại A_2 thông qua ba xí nghiệp B_1, B_2, B_3 với khả năng sản xuất (số đơn vị sản phẩm loại A_1 hay sản phẩm loại A_2) lần lượt là 12000, 11000, 8000 đơn vị sản phẩm. Chi phí (*đơn vị tính 10.000 đồng/1sản phẩm*) khi sản xuất mỗi sản phẩm tại mỗi xí nghiệp được cho trong bảng sau

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 12000	B_2 11000	B_3 8000
A_1:15000	7,5	6,5	7
A_2:13000	7	8	6,5

Vì chiến lược phát triển công ty, nên xí nghiệp B_1 phải thu đủ 12000 đơn vị sản phẩm để sản xuất. Hỏi phải phân phối sản phẩm cho các xí nghiệp sản xuất như thế nào để ***tổng chi phí thấp nhất*** và tính tổng chi phí thấp nhất đó?

Câu 4 (2,5 *điểm*) Một công ty đồ gỗ ký hợp đồng giao cho một hệ thống khách sạn 350 ***bộ bàn ghế giường*** (mỗi bộ gồm 1 bàn, 3 ghế, 2 giường). Công ty có hai xí nghiệp I và II với năng suất trung bình của mỗi xí nghiệp khi sản xuất bàn, ghế, giường được cho trong bảng sau (bàn/ngày, ghế/ngày, giường/ ngày)

S.Phẩm / X.Nghiệp	Bàn 1	Ghế 3	Giường 2
XN I: 1	40	90	32
XN II: 1	34	81	28

a) Hỏi phải phân công thời gian sản xuất của các xí nghiệp như thế nào để trong một ngày tạo ra được nhiều ***bộ bàn ghế giường*** nhất? Ước tính thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số ***bàn ghế giường*** hoàn thành hợp đồng.

b) Trong thực tế của dây chuyền sản xuất, để thuận tiện cho việc cung cấp nguyên vật liệu và tổ chức sản xuất, mỗi xí nghiệp không thể vừa sản xuất bàn ghế giường trong tất cả các ngày làm việc, mà phải sản xuất bàn (hoặc ghế, hoặc giường) xong rồi mới chuyển sang sản xuất ghế (hoặc bàn, hoặc giường). Hỏi phải phân công trình tự sản xuất ***bàn ghế giường*** cho các xí nghiệp như thế nào để thuận tiện cho việc tổ chức sản xuất và hoàn thành hợp đồng sớm nhất?

∗ ***Ghi chú*** **:** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Câu 1 Lập mô hình toán học của bài toán thực tế trong quản lý, sản xuất và đời sống.	G1: 1.1, 1.2, G2:2.1, 2.3 2.4.2
Câu 2 Lập bài toán đối ngẫu của 1 bài toán QHTT; xác định bài toán gốc và bài toán đối ngẫu xem bài toán nào có độ phức tạp ít hơn; áp dụng thuật toán đơn hình và định lý độ lệch bù yếu tìm nghiệm của cả hai bài toán gốc và đối ngẫu.	G1: 1.1, 1.2, G2:2.1,2.3 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4
Câu 3 Nhận dạng được bài toán trong quản lý sản xuất có dạng BTVT không cân bằng thu phát. Áp dụng được thuật toán thế vị hoặc thuật toán quy 0 cước phí để tìm nghiệm BTVT.	G1: 1.1, 1; G2:2,2.1,2.3 G2:2.1.1, 2.1.2, 2.4.2
Câu 4 Nhận dạng được bài toán trong quản lý sản xuất có dạng bài toán SXĐB. Áp dụng thuật toán điều chỉnh nhân tử để tìm nghiệm bài toán SXĐB và biết cách áp dụng nghiệm bài toán SXĐB vào việc lập kế hoạch cho sản xuất.	G1: 1.1, 1.2; G2:2.1,2.3 2.1.1, 2.1.2, 2.4.2

Ngày 11 tháng 1 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

Đáp Án
QUY HOẠCH TOÁN HỌC
(12/1/2016)

Câu 1

Gọi x, y, z là số sản phẩm loại A, B, C mà công ty cần sản xuất mỗi tuần. *(0,5 đ)*

Lợi nhuận lớn nhất: $f(x,y,z) = (11-6)x + (9-5{,}5)y + (8{,}5-5)z \to \max$ *(0,25 đ)*

Số giờ lao động sử dụng *mỗi công đoạn* không vượt quá tổng số giờ lao động *mỗi công đoạn* mà công ty có được trong 1 tuần:

Công đoạn 1: $3x + 2{,}5y + 2z \le 350$

Công đoạn 2: $5x + 3y + 5z \le 650$ *(0,5 đ)*

Công đoạn 3: $4x + 2y + 3z \le 400$

Số sản phẩm loại A không vượt quá tổng số sản phẩm loại B và C: $x \le y + z$ *(0,25 đ)*

Số sản phẩm mỗi loại không âm và nguyên: $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ và x, y, z nguyên *(0,25 đ)*

Tóm lại ta có mô hình bài toán là là tìm các số x, y, z sao cho:

(1) $f(x,y,z) = 5x + 3{,}5y + 2{,}5z \to \max$

(2) $\begin{cases} 3x + 2{,}5y + 2z \le 350 \\ 5x + 3y + 5z \le 650 \\ 4x + 2y + 3z \le 400 \\ x \le y + z \end{cases}$

(3) $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ và x, y, z nguyên *(0,25 đ)*

Câu 2

a) Bài toán đối ngẫu tương ứng (D):

(1) $g(y) = 4y_1 + 14y_2 + 9y_3 \to \min$ *(0,25 đ)*

(2) $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \ge 8 \\ -y_1 + 3y_2 - y_3 \ge -3 \end{cases}$ *(0,5 đ)*

(3) y_1 tùy ý, $y_2 \ge 0$, $y_3 \le 0$ *(0,5 đ)*

b) Trong hai bài toán thì bài toán gốc đơn giản hơn vì: Để giải bài toán gốc chúng ta chỉ cần đưa vào hai ẩn phụ và hai ẩn giả; để giải bài toán đối ngẫu chúng ta phải đổi dấu một ẩn âm, nhân hai vế bất phương trình thứ ba cho -1, đổi biến một ẩn tùy ý thành 2 ẩn và đưa vào 3 ẩn phụ, 2 ẩn giả.

Đưa bài toán đối ngẫu (P) về dạng chuẩn (P_M)

(1) $f(x) = x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 - M(x_6 + x_7) \to \max$ (với M là số dương lớn tùy ý)

(2) $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_7 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 14 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 9 \end{cases}$$

(3) $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0$

Lập bảng đơn hình (có thể không cần lập cột x_6, x_7)

Hệ số	Hệ ẩn cơ bản	PA CB	1	8	-3	0	0	-M	-M	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-M	x_7	4	1	4	-1	0	0	0	1	4
0	x_4	14	2	2	3	1	0	0	0	7
-M	x_6	9	2	-3	-1	0	-1	1	0	$\frac{9}{2}$
Bảng 1	$f_M(x) = -13M$		-3M-1	-M-8	2M-3	0	-M	0	0	*(0,25 đ)*
1	x_1	4	1	4	-1	0	0	0	1	
0	x_4	6	0	-6	5	1	0	0	-2	
-M	x_6	1	0	-11	1	0	-1	1	-2	
Bảng 2	$f_M(x) = -M + 4$		0	11M-4	-M+2	0	M	0	3M+1	
1	x_1	5	1	-7	0	0	-1	1	-1	
0	x_4	1	0	49	0	1	5	-5	8	
-3	x_3	1	0	-11	1	0	-1	1	2	
Bảng 3	$f_M(x) = 2$		0	18	0	0	2	-2+M	-7+M	

(0,5 đ)

Trong bảng 3, vì M là số dương lớn nên $\Delta_j \geq 0\ \forall\ j = \overline{1,7}$. PACB hiện có của bài toán (P_M) là $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) =$ (5,0,1,1,0,0,0) tối ưu. Trong hệ ẩn cơ bản không còn ẩn giả nên các ẩn giả $y_6 = y_7 = 0$ nên bài toán (P) có PATƯ là $(x_1, x_2, x_3) = (5,0,1)$, $f_{\max} = 2$.

Theo định lý độ lệch bù yếu ta có: $\begin{cases} 5(y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \\ 1(-y_1 + 3y_2 - y_3 + 3) = 0 \\ y_2(2 \times 5 + 2 \times 0 + 3 \times 1 - 14) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = -2 \end{cases}$, $g_{\min} = 2$

Phương án tối ưu bài toán gốc (P) là: $(y_1, y_2, y_3) = (5,0,-2)$, $g_{\min} = 2$ ***(0,5 đ)***

Câu 4

Bài toán này có dạng bài toán vận tải không cân bằng thu phát với lượng phát ít hơn lượng thu là $(8000+11000+12000)-(15000+13000)=3000$. Lập thêm trạm giả A_3 với lượng cần phát $a_3=3000$. Để trạm B_1 thu đủ thì lượng hàng giả trạm A_3 không được phát vào trạm B_1 nên ô $(3,1)$ là ô cấm, vì cần ***tổng chi phí thấp nhất*** nên đây là bài toán $f \to \min$ do đó "cước phí" ô $(3,1)$ là M (với M là số dương lớn tùy ý). ***(0,75 đ)***

Lần lượt phân phối như sau: ô $(2,3)$ 8000 ; ô $(1,2)$ 11000; ô $(2,3)$ 500; ô $(1,3)$ 400; ô $(3,3)$ 300

Sau khi phân phối xong ta được phương án cơ bản ban đầu không suy biến, tìm các thế vị hàng và các thế vị cộ rồi tiếp theo tính $k_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ ta được được:

Xí nghiệp Sản phẩm	B_1 12000	B_2 11000	B_3 8000	
A_1:15000	7,5 × 0 4000	6,5 × 0 1100	7 0	$u_1=7,5$
A_2:13000	7 × 0 5000	8 2	6,5 × 0 8000	$u_2=7$
A_3: 3000	M × 0 Đưa ra 3000	0 M-1	0 × M-0,5 Đưa vào	$u_3=M$
	$v_1=0$	$v_2=-1$	$v_3=-0,5$	

Còn ô $(3,3)$ có $k_{33}=M-0,5>0$ nên phương án cơ bản hiện có không tối ưu. ***(0,75 đ)***

Ô đưa vào là ô (3,3).

Vòng điều chỉnh là $V=\{(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$, $V^C=\{(2,3),(3,1)\}, V^L=\{(2,1),(3,3)\}$.

Ô đưa ra là ô $(3,1)$ và lượng điều chỉnh là $x_{31}=3000$. Lập phương án mới và tìm hệ thống thế vị mới ta được:

Xí nghiệp Sản phẩm	B_1 12000	B_2 11000	B_3 8000	
A_1:15000	7,5 × 0 4000	6,5 × 0 1100	7 0	$u_1=7,5$
A_2:13000	7 × 0 8000	8 2	6,5 × 0 5000	$u_2=7$
A_3: 3000	M 0,5-M	0 -0,5	0 × M-0,5 3000	$u_3=0,5$
	$v_1=0$	$v_2=-1$	$v_3=-0,5$	

Tất cả các ô đều có $k_{ij} \le 0$ nên phương án cơ bản này tối ưu. Vì ô cấm $(3,1)$ nhận giá trị 0 nên bài toán có phương án tối ưu là:

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 12000	B_2 11000	B_3 8000
A_1:15000	7,5 / 4000	6,5 / 1100	7 / 0
A_2:13000	7 / 8000	8 / 0	6,5 / 5000

Tổng chi phí bé nhất:

$$f_{\min} = 7{,}5 \times 4000 + 6{,}5 \times 11000 + 7 \times 8000 + 6{,}5 \times 5000 = 190.000 (\times 10.000 \text{ đồng})$$ ***(0,25 đ)***

Chú ý: ***Có thể giải bằng thuật toán quy 0 cước phí.***

Câu 4

Đây là bài toán dạng "Bài toán sản xuất đồng bộ", mỗi bộ gồm 1 bàn, 3 ghế và 2 giường.

Đưa bài toán về dạng bài toán SXĐB dạng chuẩn

S.Phẩm / X.Nghiệp	Bàn 1	Ghế(quy ước) 1	Giường(quy ước) 1	
XN I: 1	40 ×	30	16 ×	$u_1 = 40$
XN II: 1	34 ×	27 ×	14	$u_2 = 36$
	$v_1 = 1$	$v_2 = \frac{4}{3}$	$v_3 = \frac{5}{2}$	

(0,75 đ)

1a) $\max\{c_{ij} : i = 1,2;\ j = 1,2,3\} = 40 = c_{11}$ nên ô chọn đầu tiên là ô (1,1), $u_1 = 40$, $v_1 = 1$

1b) $k = 1$: $\max\{c_{1j} : j = 2,3\} = \max\{30,16\} = 30 = c_{12}$

Nhân tử cột 2 là $v_2 = \min\left\{\frac{u_1}{c_{12}}\right\} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$; ô (1,2) là ô chọn tiếp theo

1c) Chỉ còn hàng 2 chưa có nhân tử nên $r = 2$ và nhân tử hàng 2 là

$u_2 = \max\{c_{2j}v_j : j = 1,2\} = \max\left\{34, 27 \times \frac{4}{3}\right\} = 36 = c_{22}v_2$. Ô (2,2) là ô chọn tiếp theo.

1b) Chỉ còn cột 3 chưa có nhân tử nên $t = 3$ và nhân tử cột 3 là

$$v_3 = \min\left\{\frac{u_1}{c_{13}}, \frac{u_2}{c_{23}}\right\} = \min\left\{\frac{40}{16}, \frac{36}{14}\right\} = \frac{5}{2} = \frac{u_1}{c_{13}}$$

Ô (1,3) là ô chọn tiếp theo.

Tính được : $z = \dfrac{40+36}{1+\frac{4}{3}+\frac{5}{2}} = \dfrac{456}{29} \approx 15{,}7241$

S.Phẩm / X.Nghiệp	Bàn 1	Ghế(quy ước) 1	Giường(quy ước) 1	
XN I: 1	40 × $x_{11} = \frac{57}{145}$	30 đưa ra × $x_{12} = -\frac{109}{290}$	16 × $x_{13} = \frac{57}{58}$	$u_1 = 40$ (+)
XN II: 1	34 $x_{21} = 0$	27 × $x_{22} = 1$	14 đưa vào $x_{23} = 0$	$u_2 = 36$ (-)
	$v_1 = 1$ (+)	$v_2 = \frac{4}{3}$ (-)	$v_3 = \frac{5}{2}$ (+)	

Dựa vào $\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i=\overline{1,2} \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = z,\ j=\overline{1,3} \end{array}\right\} \text{voi } (i,j)\in S \\ x_{ij} = 0, \text{ voi } (i,j)\notin S \end{cases}$, với S là tập các ô chọn "×"

tính được $x_{11} = \frac{57}{145} \geq 0,\ x_{12} = -\frac{109}{290} < 0,\ x_{13} = \frac{57}{58} \geq 0, x_{21} = 0 \geq 0,\ x_{22} = 1 > 0,\ x_{23} = 0 \geq 0$ nên giả phương án này không là phương án tối ưu. ***(0,75 đ)***

$$\lambda = \min\left\{\frac{36}{34\times 1}, \frac{36}{14\times\frac{5}{2}}\right\} = \frac{36}{35} = \frac{u_2}{c_{23}v_3}$$. Ô đưa vào là ô (2,3).

Sửa nhân tử

S.Phẩm / X.Nghiệp	Bàn 1	Ghế(quy ước) 1	Giường(quy ước) 1	
XN I: 1	40 × $x_{11} = \frac{405}{1036}$	30 $x_{12} = 0$	16 × $x_{13} = \frac{631}{1036}$	$u_1 = \frac{288}{7}$
XN II: 1	35 $x_{21} = 0$	27 × $x_{22} = \frac{150}{259}$	14 × $x_{23} = \frac{109}{259}$	$u_2 = 36$
	$v_1 = \frac{36}{35}$	$v_2 = \frac{4}{3}$	$v_3 = \frac{18}{7}$	

Tính được : $z = \dfrac{\frac{288}{7}+36}{\frac{36}{35}+\frac{4}{3}+\frac{18}{7}} = \dfrac{4050}{259} \approx 15{,}6370$

Dựa vào $\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,2} \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} = z,\ j = \overline{1,3} \end{array}\right\} \text{voi } (i,j) \in S \\ \quad x_{ij} = 0, \text{ voi } (i,j) \notin S \end{cases}$, với S là tập các ô chọn "×"

Tính được $x_{11} = \dfrac{405}{1036} \geq 0,\ x_{12} = 0 \geq 0,\ x_{13} = \dfrac{631}{1036} \geq 0, x_{21} = 0 \geq 0,\ x_{22} = \dfrac{150}{259} > 0,\ x_{23} = \dfrac{109}{259} \geq 0$ nên giả phương án này là phương án tối ưu.

Thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số ***bàn ghế giường*** hoàn thành hợp đồng:
$T = \dfrac{350}{\frac{4050}{259}} = \dfrac{1813}{81} \approx 22,38$ ngày ***(0,5 đ)***

b) $X_{11} = x_{11} \times T = \dfrac{35}{4} = 8,75$; $X_{12} = x_{12} \times T = 0$; $X_{13} = x_{13} \times T = \dfrac{4417}{324}$; $X_{21} = x_{21} \times T = 0$;
$X_{22} = x_{22} \times T = \dfrac{350}{27} \approx 12,9629...$, $X_{23} = x_{23} \times T = \dfrac{763}{81} \approx 9,4197..$

S.Phẩm / X.Nghiệp	Bàn 1	Ghế 3	Giường 2
XN I: 1	40 $X_{11} = \frac{35}{4} = 8,75$	90 $X_{12} = 0$	32 $X_{13} = \frac{4417}{324} \approx 13,6327$
XN II: 1	35 $X_{21} = 0$	81 $X_{22} = \frac{350}{27} \approx 12,9629...$	28 $X_{23} = \frac{763}{81} \approx 9,4197..$

Phân công trình tự sản xuất bàn ghế giường cho các xí nghiệp như sau: Xí nghiệp I sản xuất bàn trước (khoảng 8,75 ngày-đủ 350 bàn), sau khi sản xuất bàn xong sẽ chuyển sang sản xuất giường (khoảng 13,6327 ngày); xí nghiệp II sản xuất ghế trước (khoảng 12,9629 ngày- đủ 1050 ghế), sau khi sản xuất ghế xong sẽ chuyển sang sản xuất giường (khoảng 9,4197 ngày- cùng xí nghiệp I sản xuất đủ 700 giường).

(0,5 đ)

Hết